12/4/16

Ορισμός: Δίνεται (E,ρ) μ.χ θα λέγεται πλήρης αν κάθε βασική ακολουθία στον (E,ρ) είναι συγκλίνουσα.

π.χ ο $(\mathbb{Q},|\,|)$ δεν είναι πλήρης.

! αν μια ακολουθία συγκλίνει σ' ένα χώρο σύγκλινει και στον υπόχωρο γιατί η σύγκλιση εξαρτάται απ' τη μετρική, η οποία διατηρείται απο υπόχωρο σε χωρό πχ ($E =]0,1]$, $|\cdot|$) $x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$

$\Downarrow$

βασική στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

$\Downarrow$

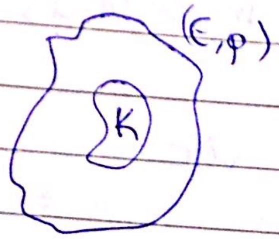
βασική στο $(E, |\cdot|)$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1 σελ 148

Δίνεται $K \subseteq (E,\rho)$ με K κλειστό. Θδο (K,ρ) είναι πλήρης μ.χ

ΑΠΟΔ

Έστω $(x_n)_n \subseteq (K,\rho)$ βασική Θδο είναι συγκλίνουσα στο K.



K κλειστό σημαίνει ότι αν υπάρχει το όριο μιας ακολουθίας στο K, τότε το όριο $\in K$ = αν $y_n \in K$ και $y_n \to y \Rightarrow y \in K$

$(K = \bar{K})$

Η x_n είναι βασική στον (E,ρ)

Άρα $\exists x \in E : x_n \xrightarrow{(E,\rho)} x$ (επειδή (E,ρ) πλήρης)

$x_n \in K \overset{①}{\Longrightarrow} x \in \bar{K} = K$ εφόσον K κλειστό

Άρα (K,ρ) πλήρης.

ΠΡΟΤ 2 σελ 148

(E,ρ) μ.χ πλήρης, $K \subseteq E$ ώστε (K,ρ) πλήρης Θδο K κλειστό

ΑΠΟΔ.

$K \subseteq \bar{K} = K \cup K'$ ← το K με τα σ.σ

Για να δ.ο K κλειστό αρκεί ν.δο $\bar{K} \subseteq K$

Ας διαλέξω $x \in \bar{K}$ Θ.δο $x \in K$

Εφόσον $x \in \bar{K} \xRightarrow{\text{ορισμό}} \exists (x_n)_n \subseteq K$

$x_n \xrightarrow{\rho} x$

$\to x_n$ (E,ρ)-βασική $\Rightarrow x_n$ (K,ρ)-βασική και επειδή (K,ρ) πλήρης $\Rightarrow$

συγκλίνει, δηλ $\exists y \in K : x_n \xrightarrow{(K,\rho)} y$ άρα $x \in \bar{K} \subseteq E$

$x_n \xrightarrow{(E,\rho)} x$ λόγω μοναδικότητα ορίου $y = x$

Προταση: Δίνονται 2 μχ (E_1,ρ_1) και (E_2,ρ_2), (E,ρ), $E = E_1 \times E_2$

$x_1, y_1 \in E_1$ | $\rho(\bar{x},\bar{y}) = \sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1) + \rho_2^2(x_2+y_2)}$

$x_2, y_2 \in E_2$ | $\bar{x} = (x_1, y_1)$

$\bar{y} = (\cancel{x_2}, y_2)$

Θδο (E,ρ) πλήρης $\Longleftrightarrow$ (E_1,ρ_1) και (E_2,ρ_2) πλήρεις

$\boxed{\text{ΑΠΟΔ}}$

$(\Longrightarrow)$ Θεωρώ μια $(a_n)_n \in E_1$ ρ_1-βασ. Θδο $\exists a \in E_1$ $a_n \xrightarrow{\rho_1} a$ ($\Rightarrow (E,\rho_1)$ πλήρης)

$\bar{a}_n \in E_1 \times E_2$ Σταθεροποιούμε ένα $\ell \in E_2$ με $\bar{a}_n = (a_n, \ell)$ Θδο $(\bar{a}_n)$ είναι (E,ρ)-βασική.

$\rho(\bar{a}_n, \bar{a}_m) = \sqrt{\rho_1^2(a_n,a_m) + \rho_2^2(\ell,\ell)} \overset{=0}{=} \rho_1(a_n,a_m)$

a_n ρ_1-βασική. Άρα $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in N$ $\rho_1(a_n,a_m) < \epsilon$, $\forall n,m \geq n_0$

$\Rightarrow \rho(\bar{a}_n, \bar{a}_m) < \epsilon$ $\forall n,m \geq n_0 \Rightarrow (\bar{a}_n)$ ρ-βασική

(E,ρ) πλήρης

$\bar{a}_n$ ρ-βασική

$\bar{a}_n = (a_n, \ell) \rightarrow \bar{a} \in E_1 \times E_2$ $\Rightarrow a_n \rightarrow x$ και $\ell \rightarrow y$ $(\ell = y)$

$\bar{a} = (x,y)$ $x \in E_1$, $y \in E_2$

Άρα $a_n \xrightarrow{(E,\rho)} x \in E_1$

$(\Longleftarrow)$

Παίρνω $\bar{a}_n \in E_1 \times E_2$ και ρ-βασική

$\bar{a}_n = (x_n, y_n)$ όπου $x_n \in E_1$, $y_n \in E_2$ κ' επειδή βασική: αν $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in N$ ώστε $\rho(\bar{a}_n, \bar{a}_m) < \epsilon$ $\forall n,m \geq n_0$

$\rho(\bar{a}_n, \bar{a}_m) = \sqrt{\rho_1^2(x_n,x_m) + \rho_2^2(y_n,y_m)} \geq \rho_1(x_n,x_m)$ κ' $\rho_2(y_n,y_m)$

$\rightarrow \rho_1(x_n,x_m) < \epsilon$, $\forall n,m \geq n_0$

$\rho_2(y_n,y_m) < \epsilon$, $\forall n,m \geq n_0$ $\Longrightarrow$

$\Rightarrow (x_n)$ ρ_1-βασική $\rightarrow \exists x \in E_1$ $x_n \xrightarrow{\rho_1} x$

Παρόμοια (y_n) ρ_2-βασική $\Rightarrow \exists y \in E_2$, $y_n \xrightarrow{\rho_2} y$

$\Longrightarrow \rho(\bar{a}_n, (x,y)) \rightarrow \infty$

Scanned by CamScanner

ΑΣΚΗΣΗ: Ν.δ.ο $(\mathbb{R}, \rho = |\,|)$ είναι πλήρης

ΑΠΟΔ: Έστω $(x_n)_n$ ρ-βασική $\Rightarrow (x_n)_n$ ρ-φραγμένη: $\exists K : |x_n| \le K, \forall n$

Θ Bolzano $\Rightarrow \exists (x_{k_n})_n, \; x_{k_n} \to x$

$\left.\begin{array}{l} \exists (x_{k_n})_n, \; x_{k_n} \to x \\ (x_n)_n \text{ βασική} \end{array}\right\} \; 0 \le \rho(x_n, x) \le \rho(x_n, x_{k_n}) + \rho(x_{k_n}, x)$

$\qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$\qquad 0 \qquad 0 \qquad 0$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ο μ.χ (E, ρ) είναι πλήρης αν-ν $\forall$ φθίνουσα ακολουθία κλειστών $\subseteq (E, \rho)$

Έστω $(F_n)_n$ $(F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq F_{;} \supseteq \ldots)$ με $\delta(F_n) \to 0 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$

ΑΠΟΔ

$(\Longrightarrow)$ $\left.\begin{array}{l} (E, \rho) \text{ πλήρης} \\ F_1 \supseteq \ldots \supseteq \overset{\neq \emptyset}{F_n} \supseteq F_{n+1} \supseteq \ldots \\ F_n \text{ κλειστά} \\ \delta(F_n) \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$

• Παρατήρηση: $E = (0, 1]$, η $F_n = (0, \frac{1}{n}]$ είναι κλειστό στον E

Ασκηση Δίνεται $(x_n) \subseteq (E, \rho)$ ώστε το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ να μην είναι κλειστό. Επίσης η (x_n) βασική. Δ.Ο η x_n είναι συγκλίνουσα.

$\boxed{\text{ΛΥΣΗ}}$ Ψάχνω x: $x_n \to x$ $\qquad x_n \subseteq K$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_n \to x$

$\bar{A} \neq A$, δηλ $\bar{A} \supsetneq A \neq \emptyset$ $\qquad x \in \bar{K}$

Διαλέγουμε ένα $x \in \bar{A} \setminus A$